

اسم الطالب :
المدة : ساعة ونصف
العلامة : 100

امتحان مقرر بنى جبرية (4)
لطلاب السنة الرابعة رياضيات - جبر
الفصل الأول للعام الدراسي 2018/2017

جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

السؤال الأول : (15 علامة)

اثبت ان نصف الزمرة S التي تحقق الشرط $aS = Sa = S \forall a \in S$ تكون زمرة .

السؤال الثاني : (15 علامة)

- (أ) اذكر تعريف الانسحاب اليميني والانسحاب اليساري لنصف زمرة S .
(ب) إذا كان λ انسحاب يساري لنصف زمرة S و $a \in S$ ، فاثبت أن $\lambda\lambda_a = \lambda_{\lambda(a)}$.

السؤال الثالث : (15 علامة)

لتكن S نصف زمرة و A مجموعة جزئية غير خالية من S ، فاثبت أن $B = \langle A \rangle$ إذا وفقط إذا كانت B هي تقاطع جميع انصاف الزمر الجزئية من S الحاربة على A .

السؤال الرابع : (15 علامة)

اثبت أن نصف الزمرة الدوارة $\langle a \rangle$ ذات الدليل r والدور m تكون زمرة إذا وفقط إذا كانت $r = 1$.

السؤال الخامس : (15 علامة)

اثبت أن كل زمرة طوبولوجية تملك جملة أساسية تناظرية $\{u\}$ لمجاورات العنصر الحادي e .

السؤال السادس : (15 علامة)

اثبت أنه من أجل أي زمرة جزئية مفتوحة H في زمرة نصف طوبولوجية G فإن H تكون مغلقة أيضاً .

السؤال السابع : (10 علامات)

لتكن $G = \{1, -1, i, -i\}$ حيث i العدد التخيلي ، ولنعرف على G الضرب العادي المألوف فتصبح G زمرة ، لنزودها بالطوبولوجيا τ المعرفة بالشكل التالي : $1 \in \tau \iff A \in \tau$ إضافة للمجموعة الخالية (أي أن المجموعات المفتوحة في G هي المجموعات الحاربة على العنصر 1 إضافة للمجموعة الخالية)

(1) هل التطبيق $g_1: G \times G \rightarrow G$ حيث $g_1(x, y) = xy$ مستمر في النقطة $(1, i)$ ولماذا ؟

(2) هل التطبيق $g_2: G \rightarrow G$ حيث $g_2(x) = x^{-1}$ مستمر في النقطة $-i$ ولماذا ؟

لعم تصحيح مقدر بي جبرية (٤)
لطبقة السنة رابعة رياضيات - جبر
الفصل الأول للعام الدراسي ٢٠١٧/٢٠١٨

السؤال الأول: [15]
العملية تجسيع على S

$$\forall a \in S; aS = S \Rightarrow \forall a \in S; \exists x \in S; ax = a \Rightarrow x \text{ هادي يميني في } S$$

$$\forall a \in S; Sa = S \Rightarrow \forall a \in S; \exists y \in S; ya = a \Rightarrow y \text{ هادي ياربي في } S$$

$$x = y \quad (8)$$

أي أن S تملك عنصراً هادياً لفرله e

$$\left. \begin{aligned} e \in S \& \forall a \in S; aS = S \Rightarrow \exists a' \in S; aa' = e \\ e \in S \& \forall a \in S; Sa = S \Rightarrow \exists a'' \in S; a''a = e \end{aligned} \right\} \Rightarrow (7)$$

$$a' = a''e = a''aa' = e a' = a' \Rightarrow \forall a \in S; \exists a' \in S; aa' = a'a = e$$

ومن هنا نتج أن S زمرة.

السؤال الثاني: [15]

١. نعمل على تحويل ρ لنفس زمرة S أنه اشحاب يميني ρ إذا كان:

$$(5) \quad x\rho(y) = \rho(xy) \quad ; \quad \forall x, y \in S$$

ونقول على تحويل ρ لنفس زمرة S أنه اشحاب ياربي ρ إذا كان:

$$(5) \quad \rho(x)y = \rho(xy) \quad ; \quad \forall x, y \in S$$

$$\rho \rho_a(x) = \rho(ax) = \rho(a)x = \rho_{\rho(a)}(x) \quad ; \quad \forall x \in S \Rightarrow$$

$$(5) \quad \rho \rho_a = \rho_{\rho(a)}$$

السؤال الثالث: [15]

٢. بفرض أن B هي تقاطع جميع أنصاف الزمر الجزئية من S الحادية على A ، أي $A \subseteq B$ و B نصف زمرة $\Leftarrow B$ تحوي كل الجداءات الممكنة لعناصر من A أي

$$\langle A \rangle \subseteq B$$

في نهاية أخرى $A \subseteq \langle A \rangle$ وبالتالي حسب تعريف B فإن $B \subseteq \langle A \rangle$ ومنه نتج (5)

$$\langle A \rangle = B$$

العكس: لنفرض أن $B = \langle A \rangle$ تكون حارة A تكون حارة $\langle A \rangle$ وبالتالي فهي حارة
 أن كل نصف زمرة جزئية من S تحتوي A تكون حارة $\langle A \rangle$ أي أن B هي
 ومنه يتبع أن B هي أصغر نصف زمرة جزئية من S الحارة A . (5)

السؤال الرابع: [15]

لنفرض أن $n=1$ من المصروف أن
 جزئية من $\langle a \rangle$ مضمنا $n=1$ تصبح (8)
 وبالتالي فإن $\langle a \rangle$ تصبح زمرة.
 العكس: لنفرض أن $\langle a \rangle = \{a, a^2, \dots, a^{n+m-1}, a^{n+m}\}$ زمرة دورية فإن
 $a^{n+m} = a \iff a = a^{n+m-1}$ يكون حاردي فيما إذا تحقق
 $a^2 = a \iff n=1$ (7)

السؤال الخامس: [15]

لتكن $\{u\}$ جملة أساسية من الجارات المفتوحة للنفس الحاردي e وبما أن
 $e = e^{-1}$ وأن g هو ميمورفزم يكون من أجل أي e من $\{u\}$ فإن e تكون
 مجاورة مفتوحة للنفس، فإذا أخذنا $u = e \cap e^{-1}$ فإن u تكون مجاورة متناظرة (8)
 للنفس وذلك لأن $u^{-1} = e \cap e^{-1} = u$ وبما أن كل مجاورة e تحوي مجاورة u
 يتبع أن كل مجاورة e تحوي مجاورة u وتحتوي u يتبع أن $\{u\}$ تشكل جملة
 أساسية لجارات النفس وهي متناظرة. (7)

السؤال السادس: [15]

من أجل أي x من G فإن xH مفتوحة وبالتالي فإن UxH تكون مفتوحة
 وبالتالي $G - UxH$ تكون مغلقة ولتكن أن
 $H = G - \bigcup_{x \notin H} xH$
 لكن $y \in H \iff y \notin xH \forall x \notin H$ لأنه لو كان خلاف ذلك كان $y \in xH$
 \iff توجد $h \in H$ بحيث يكون $y = xh \iff y = xh^{-1} = x$ لأن H زمرة $\iff x \in H$
 وهذا غير ممكن $\iff y \notin \bigcup_{x \notin H} xH \iff y \in G - \bigcup_{x \notin H} xH$ أي أن (8)
 (1) $H \subseteq G - \bigcup_{x \notin H} xH$

$$x \notin H \text{ وذلك مما يثبت } y \notin xH \Leftrightarrow y \notin \bigcup_{x \notin H} xH \Leftrightarrow y \in G - \bigcup_{x \notin H} xH$$

$$\forall x \notin H \text{ وذلك } y \neq z \text{ من أجل } h=e \text{ يكون } y \neq xh \text{ فإن } \forall x \notin H \text{ و } \forall h \in H \Leftrightarrow$$

$$\text{وذلك } y \in H \Leftrightarrow \forall x \notin H \Leftrightarrow y \in H \Leftrightarrow \forall x \notin H \text{ وذلك } \boxed{\textcircled{2} \mid G - \bigcup_{x \notin H} xH \subseteq H}$$

$$\text{وفي الاستدلال نفتح الأقواس} \quad \textcircled{7} \quad H = G - \bigcup_{x \notin H} xH \text{ أي أن } H \text{ مغلق}$$

السؤال الرابع: 10

(1) $g_1 = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12)$ ان اصف مجاورة للعصر g_1 ان اصف مجاورة

للعصر g_1 هي $\{1\}$ و اصف مجاورة للعصر g_1 هي $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ $g_1(\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ أي أن g_1 مستقر في النقطة $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12)$ $\textcircled{5}$

(2) ان $g_2 = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12)$ و اصف مجاورة للعصر g_2 هي $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ و اصف مجاورة للعصر

$$g_2(\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

أي أن g_2 مستقر في النقطة $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12)$ $\textcircled{5}$

د. عصام نسيم

~~8~~